
1 Mathematische Aufgaben

Aufgaben

1. Summe der durch 3 und 5 teilbaren natürlichen Zahlen

Schreiben Sie ein Programm, das die Summe aller durch 3 und 5 teilbaren natürlichen Zahlen bis zu einer vom Benutzer vorgegebenen größten Zahl berechnet und ausgibt.

2. Größter gemeinsamer Teiler

Schreiben Sie ein Programm, das zwei positive Ganzzahlen entgegennimmt und den größten gemeinsamen Teiler der beiden berechnet und ausgibt.

3. Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Schreiben Sie ein Programm, das zwei positive Ganzzahlen entgegennimmt und das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden berechnet und ausgibt.

4. Größte Primzahl kleiner als die gegebene Zahl

Schreiben Sie ein Programm, das eine positive Ganzzahl entgegennimmt und die größte Primzahl berechnet und ausgibt, die kleiner als diese Zahl ist.

5. Sexy Primzahlpaare

Schreiben Sie ein Programm, das alle sexy Primzahlpaare bis zu einer vom Benutzer festgelegten Obergrenze ausgibt.

6. Abundante Zahlen

Schreiben Sie ein Programm, das alle abundanten Zahlen bis zu einer vom Benutzer festgelegten Obergrenze und deren Abundanz ausgibt.

7. Befreundete Zahlen

Schreiben Sie ein Programm, das alle Paare befreundeter Zahlen kleiner als 1.000.000 ausgibt.

8. Armstrong-Zahlen

Schreiben Sie ein Programm, das alle dreistelligen Armstrong-Zahlen ausgibt.

9. Primfaktorzerlegung

Schreiben Sie ein Programm, das die Zerlegung in Primzahlen einer vom Benutzer genannten Zahl ausgibt.

10. Gray-Code

Schreiben Sie ein Programm, das die normalen Binärdarstellungen, Gray-Code-Darstellungen und decodierten Gray-Code-Werte für alle 5-Bit-Zahlen anzeigt.

11. Numerische Werte in römische Zahlen umwandeln

Schreiben Sie ein Programm, das eine vom Benutzer eingegebene Zahl als römische Zahl ausgibt.

12. Größte Collatz-Folge

Schreiben Sie ein Programm, das ermittelt, welche Zahl bis zu 1.000.000 die längste Collatz-Folge produziert, und das diese Zahl sowie die Länge der Folge ausgibt.

13. Den Wert von Pi berechnen

Schreiben Sie ein Programm, das den Wert von Pi bis auf zwei Dezimalstellen berechnet.

14. ISBNs validieren

Schreiben Sie ein Programm, das überprüft, ob der vom Benutzer als String eingegebene 10-stellige Wert eine gültige ISBN-10-Nummer darstellt.

(...)

7. Befreundete Zahlen

Zwei Zahlen werden als *befreundet* bezeichnet, wenn die Summe der echten Teiler der einen Zahl gleich der anderen Zahl ist, wobei es sich bei den echten Teilern um die positiven Teiler der Zahl außer der Zahl selbst handelt. So hat beispielsweise die Zahl 220 die echten Teiler 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 und 110, deren Summe 284 ergibt, während 284 die echten Teiler 1, 2, 4, 71 und 142 hat, die sich zu 220 addieren. Daher sind 220 und 284 befreundet.

Zur Lösung dieser Aufgabe durchlaufen Sie alle Zahlen bis zur angegebenen Grenze. Dabei bilden Sie für jede Zahl die Summe $sum1$ der echten Teiler und berechnen anschließend die Summe der echten Teiler von $sum1$. Ist das Ergebnis gleich der ursprünglichen Zahl, so sind diese Zahl und $sum1$ befreundet.

```
void print_amicables(int const limit)
{
    for (int number = 4; number < limit; ++number)
    {
        auto sum1 = sum_proper_divisors(number);
        if (sum1 < limit)
        {
            auto sum2 = sum_proper_divisors(sum1);
            if (sum2 == number && number != sum1)
            {
                std::cout << number << "," << sum1 << std::endl;
            }
        }
    }
}
```

Die Funktion `sum_proper_divisors()` stammt aus der Lösung zur Aufgabe mit den abundanten Zahlen.

Tipp

Die vorstehende Funktion gibt Zahlenpaare doppelt aus, also beispielsweise sowohl 220,284 als auch 284,220. Ändern Sie den Code, sodass jedes Paar nur einmal erscheint.



8. Armstrong-Zahlen

Wenn Sie die einzelnen Ziffern einer Zahl in die Potenz erheben, die der Anzahl der Stellen entspricht, und die Summe dieser potenzierten Ziffern die Zahl selbst ergibt, so haben Sie es mit einer sogenannten *Armstrong-Zahl* (benannt nach Michael F. Armstrong) oder narzisstischen Zahl zu tun. Die kleinste Armstrong-Zahl ist 153, da $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$.

Um zu bestimmen, ob eine dreistellige Zahl narzisstisch ist, müssen Sie erst ihre einzelnen Ziffern bestimmen, um deren Potenzen summieren zu können. Dazu sind kostspielige Divisions- und Modulo-Operationen erforderlich. Um schneller voranzukommen, können Sie jedoch die Tatsache ausnutzen, dass die Zahl gleich der Summe ihrer Ziffern multipliziert mit der Zehnerpotenz ihrer jeweiligen Stelle ist. Zahlen unter 1000 können wir also als $a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c$ schreiben. Da wir nur dreistellige Zahlen betrachten wollen, beginnt a bei 1. Da Multiplikationen schneller sind als Divisionen und Modulo-Operationen, kommen wir mit dieser